発行年月日 2019年　7月　10日　第11号　　　　発行者　盛岡中央高校附属中学校　数学科　下町壽男

あうがく大好きさ
２０１９年度11号

期末考査前の「整数」についての授業より

● 文字式の利用　～整数編～

ガウスというドイツの有名な数学者がいます。彼は、18世紀から19世紀にかけて活躍し、近代数学の発展に大きく関わった人物で、数学の歴史の中で、光り輝く一番星ともいうべき天才です。

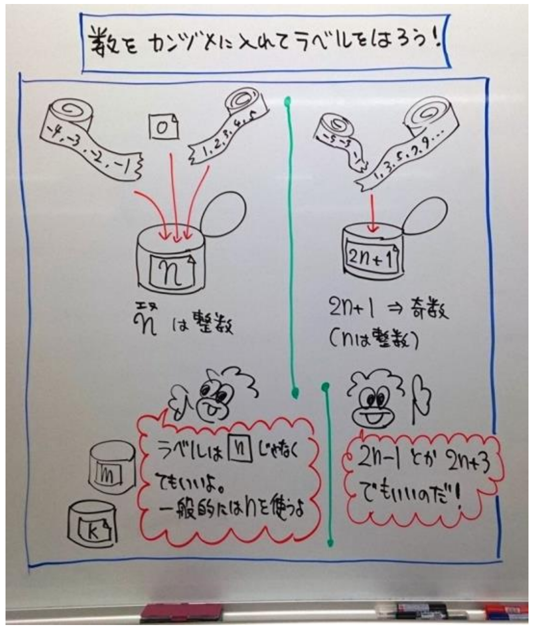
ガウスが幼少の頃、1から100までの和を瞬時に答えたという有名なエピソードは皆も知っているかもしれませんね。

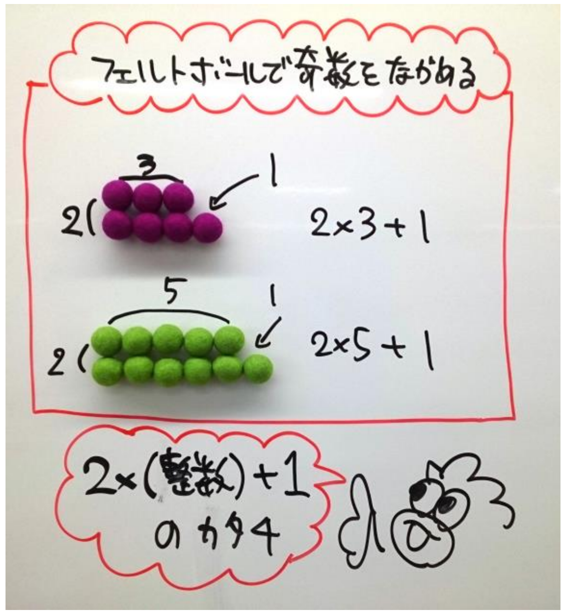
ガウスは素数など整数の性質に関する問題についても様々な研究を行い、多くの業績を残しています。彼の「**整数は数学の女王である**」ということばはとても有名です。

整数に関する問題は、一見シンプルで誰でもが取り組みやすい形をしているものが多いのですが、実はとても奥深く、未だに解決されていない問題も多く存在しています。いつか皆さんが、そんな整数の未解決問題にチャレンジして、解決してくれる日が来ればいいなあと思っています。

● 整数はn(エヌ)とおこう

整数の性質を調べる上で、通常、n(エヌ)というラベルをつけておくという話をしましたね。そして、フェルトボールを使いながら、偶数や奇数についても n で表わしましたね。





● 文字を用いた「証明」にチャレンジ

> 2つの奇数の和は偶数である。そのわけを文字を用いて説明しなさい。

奇数と奇数の和が偶数になることは何となくわかりますね。少し調べてみましょう。

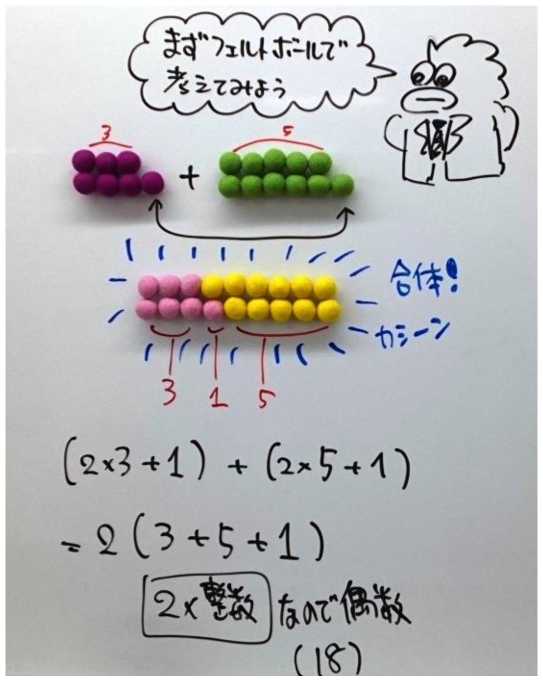
3+1=4 ，5+9=14 ，11+13=24 ，111+1111=1222

どれも偶数になります。でも奇数と奇数の組み合わせは無限にあるので、今調べた4つの例だけで「2つの奇数の和は偶数！」と宣言するわけにはいきません。

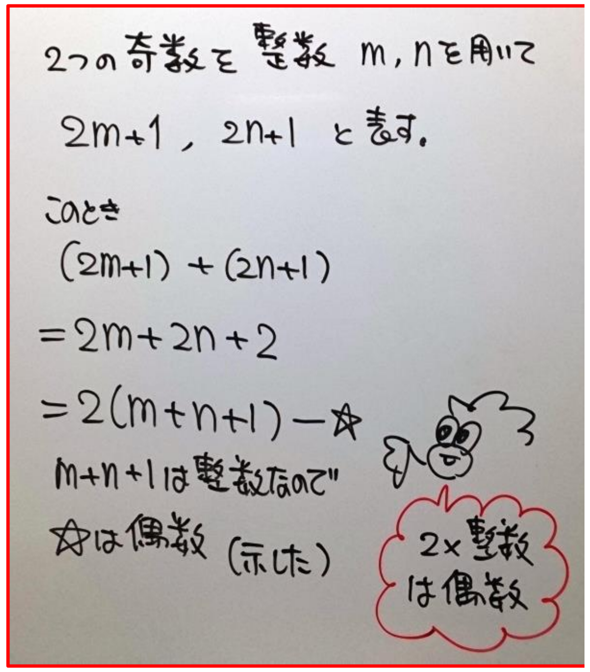
そこで文字が登場するのです。具体的な数ではなく、それが全部詰まっているカンヅメで考えることによって、すべてについて調べたことにするというのが数学的な考え方です。

代議員が選挙民を代表して討論するようなカンジですね。

ではまず、文字の前にフェルトボールで考えてみましょう。

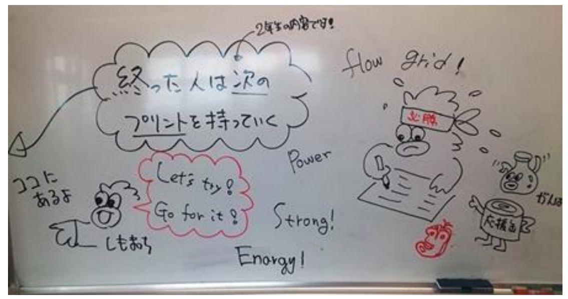


ではこのことを文字を使って表現して見ましょう。



このように文字を使って説明することが面白くなってくると、数学がどんどん得意になってくると思いますよ。

期末テスト前の授業は、これまでやってきたたくさんのことを、自分なりに咀嚼し消化する時間にしました。私はみんなの活動をじっと観察して応援するだけです。皆同じことをやっているわけですが、炎のオーラを発する人もいますね。「光ったナイフは、草原の中に捨てられていても、いつか人に見出される」という言葉があります。数学が得意であろうが、大の苦手であろうが、自分を向上させようという思いのパワーは、言葉を発していなくてもキラリと光るナイフのように自然に私の目に飛び込んでくるのです。そんな生徒を育てることこそ教師の使命であるなあと思った一日でした。

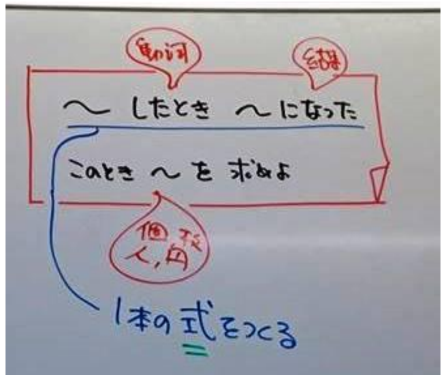


7/3　1 次方程式の授業より

期末考査明けの最初の授業では、1次不等式について、これまでのまとめをしながら進めていきました。その授業の様子を中心に、いくつか気づいたことを含めて記しておきたいと思います。

****

最初に、問題文から動詞を見つけ、「～すると～になる」というセンテンスから 1 本の式をつくり出すという話しをしました。



その後、次の問題を取り上げました。

> 例題1
> 何人かの子どもにお菓子を分ける。1人に 4 個ずつ分けると 2 個余り、1人に 5 個ずつ分けると 5 個足りない。
> 子どもの人数とお菓子の個数を求めよ。

これは「過不足算」といわれるタイプの問題です。

さて、この問題を解く前に、ちょっと横道に入って、こんな問題を取り上げてみます。

「3 人にお菓子を 4 個ずつ配りました。お菓子は何個でしょう。」

式　□×□＝□　　答え□個

皆さんは□に適するものは何かわかりますか。

「３×４」でしょうか、それとも「４×３」でしょうか。それともどちらでも良いのでしょうか。

小学校では（1 人当たりの量）×（何人分）ということで、「４×３」を正解としています。これに対して、「３×４」はなぜバツなのかということがネット上で大きな話題になったことがあります。知っている人もいるかもしれませんね。その是非については、ここでは特に取り上げませんが、皆に意見を聞いてみたいところです。

今度はこんな問題を考えてみましょう。

① お菓子が 12 個あります。3 人の子どもに配るとき、1 人分はいくつですか。

② お菓子が 12 個あります。4 個ずつ配ると何人に配ることができますか。

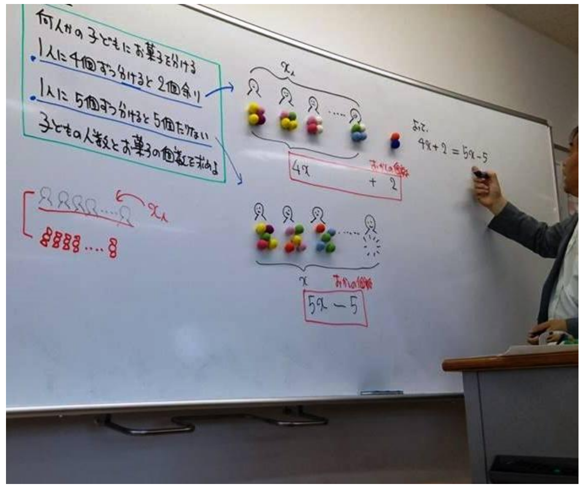
①②は割り算の問題ですが、①を等分除（とうぶんじょ）、②を包含除（ほうがんじょ）といいます。

（1 当たりの量）×（その個数）＝総数

という式に対して、（1 当たりの量）を求めにいくというのが①の等分除です。一方、②は 12 の中に 4 つがいくつ入るのかを探すというもので、これを包含除といいます。

つまり、□×３＝12　のとき□を求めるものを等分除、４×□＝12　のとき□を求めるものを包含除というということです。

さて、話しを戻して例題 1 をながめてみましょう。この問題は、1 人当たりの量が 4 個と決まっていて、配られる子どもの人数がわからない問題です。授業では写真の様に、フェルトボールを使ってイメージ化しました。



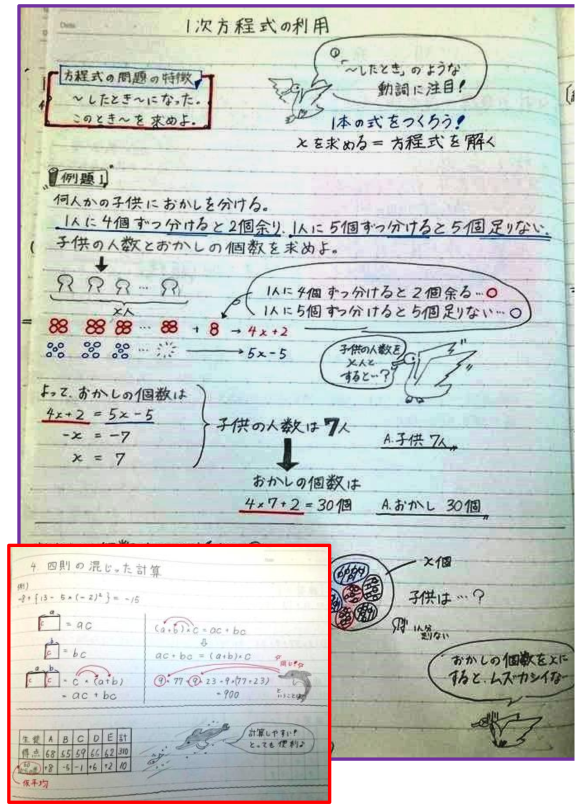
「x 人の子どもに 4 個ずつ分けると 2 個余る」ということばから、お菓子の総数は$4x+2$となりますね。また、「x 人の子どもに 5 個ずつ分けると 5 個足りない」からお菓子の総数は $5x-5$ とわかるので、これから方程式をつくって解を求めればいいですね。

もし、お菓子の個数の方を x とおくと、「4 個ずつ分けると 2 個余る」ことから、子どもの人数は「お菓子の個数から 2 個引いた個数を 1 当たりの4で割ったもの」という包含除として表されるので、$\frac{x-2}{4}$ となります。また、「5 個ずつ分けると 5 個足りない」ことから、子どもの人数は「お菓子の個数に5個足した数を 1 当たりの5で割ったもの」、つまり $\frac{x+5}{5}$ となります。これらの式で方程式を作るのですが、これはちょっとメンドウです。包含除で考えるのはちょっと難しいということですね。

F さんのノートに感動！

この授業の後、F さんのノートを見せてもらいました。こんなに丁寧にまとめられたノートを見ると授業者としてとても嬉しくなりますね。

F さんの許諾を得て、ノートの一部を web 上で私の友達に紹介したところ大きな反響を呼びました。その一部を記しておきますね。



＜感想の一部＞

- こりゃ、素晴らしい！このノートの画像をうちの学生に見せたいです。**（N さん:山形大学教授）**
- 数の無数の海の中で、迷わずに潮目を学んでいる柔らかいイルカがいることに感動します。盛岡の白鳥でしょうか？ノートに愛があって、、**（I さん:筑波大学教授）**
- 共通認識である数学を、イラストで自分の世界に引き入れている点が素晴らしいと思います。今は、英語などにサブノートがあってノートを自分でまとめるという事をしない中学生が多いみたいです。自分流にカスタマイズする自由すらない学生が気の毒に思った矢先でした。やはり学生さんの能力は無限ですね。**（U さん:九州在住の算数パフォーマー）**
- Windows のヘルプのイルカを思い出しましたが、彼女はそれを知らなくて、この数学のヘルプのマイちゃんを生み出したのですね。**（M さん:山口県教育委員会）**