発行年月日 2019年5月17日（金）　第6号　　発行者　盛岡中央高校附属中学校　数学科　下町壽男

あすうがく大好きさ
２０１９年度第６号

九九の表に潜む秘密　～みんなのレポートから～

10 連休前の授業で、九九の表を持ってきてこんな話をしました。

「九九の表の中にある 81 個の数字を全部足すといくつでしょう」

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

1 個ずつ足していくのは大変ですね。そこで、こんな風に考えるのはどうでしょう。タテヨコの数に「メートル」をつけて考えると、表の中の数はそれぞれのタテヨコの長さに対応した、田んぼの面積と考えることができます。ということは、全部の和は、タテヨコの長さが

(1+2+3+4+5+6+7+8+9)mの正方形の面積、つまり

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$

これを計算すると、$55^2=3025$　となりますね。

ところで、この九九の表を上の右の図のようにＬ字型で区切って和を計算すると、

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$

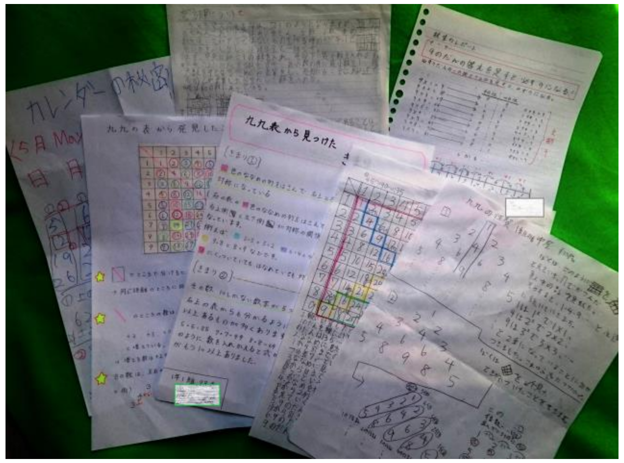
となっています。

つまり、自然数の和の平方が、自然数の立法の和に等しいことがわかりました！

面白いですねえ。

この話しをした後、皆に、九九の表やカレンダーなどの数字が集まっているものを見て気づいたことをレポートしてみませんか、と呼びかけました。

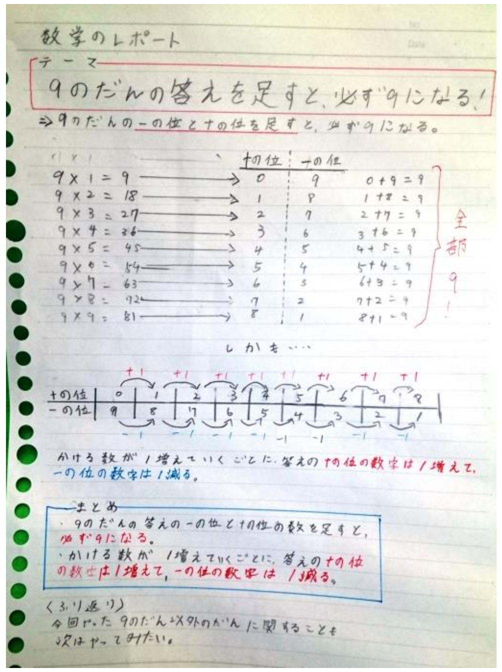
軽い呼びかけだったので、やってくる人はいないだろうなあと思っていたら、こんなにたくさんのレポートをいただきました～♪



嬉しくて舞い上がってしまいそうです。

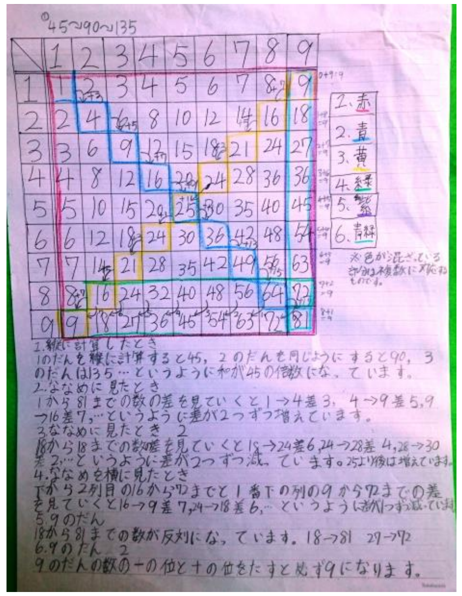
ではいただいたレポートからワンポイントだけ紹介していきます。

● Oさんのレポート



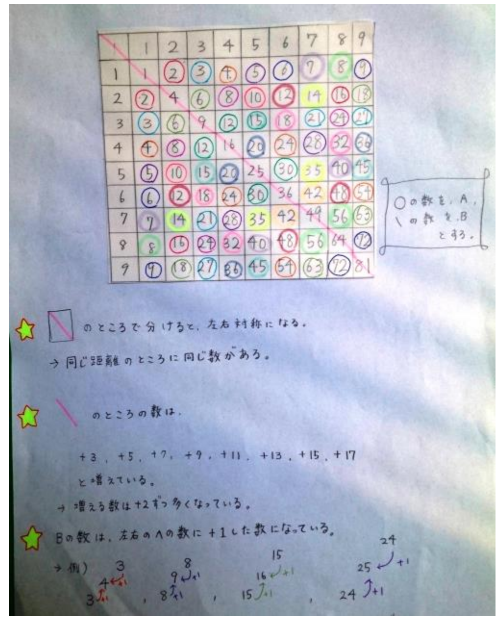
０ さんは、9 の段の各桁の数字の和が9になるという性質を発見しました。このレポートのおかげで、__9 の倍数の判定方法__について授業で触れることができました。ありがとうございました。

●Tさんのレポート



Ｔさんは０さんと同様、9 の段の秘密について書いていました。また、タテの和が 45 の倍数になっていることや、対角線の数の規則を調べてくれました。感心したのは、Ｔさんは数字の列の性質を調べる時に、__隣り合う数の差を考える__という手法を取っていることです。これはとても大切な視点です。

●Mさんのレポート



Mさんは、表の対称性に注目していました。数学の問題を考えるときは、__対称性に着目するのはとても大切__です。また、Oさんと同様、対角線の数の規則にも注目していましたね。

****

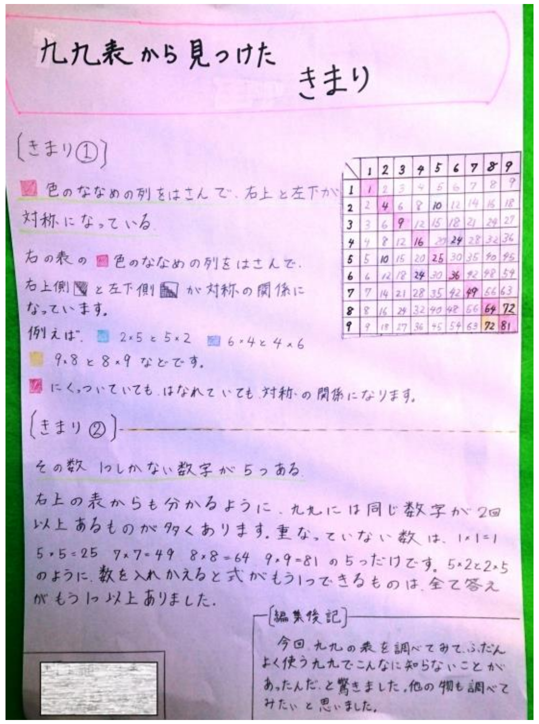
ではここで、OさんとMさんが発見してくれたことを次のようにまとめてみましょう。

2 人は、対角線の数列、$1^2,2^2,3^2,4^2\cdots$のそれぞれの差が奇数になっていることに気づきました。このことから奇数を連続で足すと次のように、平方数になることが言えるのです。

$1+3=4=2^2$　　$1+3+5=9=3^2$　　$1+3+5+7=16=4^2$

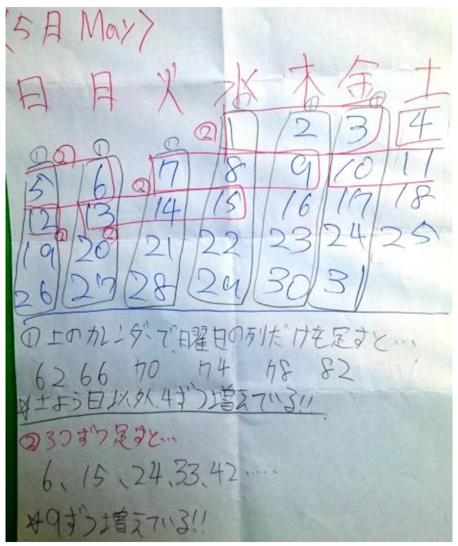
$1+3+5+7+9=25=5^2$　　$1+3+5+7+9=36=6^2$

● Fさんのレポート



Fさんのレポートはとてもキレイにまとめられています。編集後記もあって素晴らしいですね。ユニークなのは、81 個の数字の中で、1 回しか登場しない数が 5 つしかないことを見つけたことです。また、Mさん同様、表の対称性にも着目していましたね。

● O君のレポート

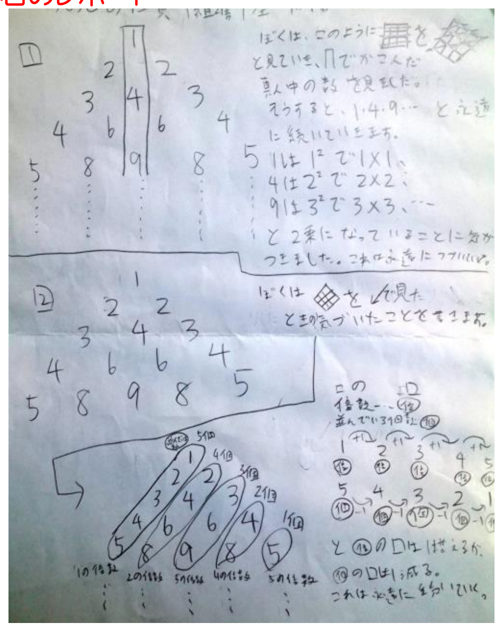


O君は、九九の表ではなく、カレンダーの秘密を二つ見つけてくれました。

一つは、曜日の列に現れる4つの数を足すと、62,66,70,74,78,82 と4つずつ増えていることを発見しました。このような数列を「等差数列（とうさすうれつ）」といいます。等差数列の性質は高校で習いますが、そのためのよい準備になったと思います。

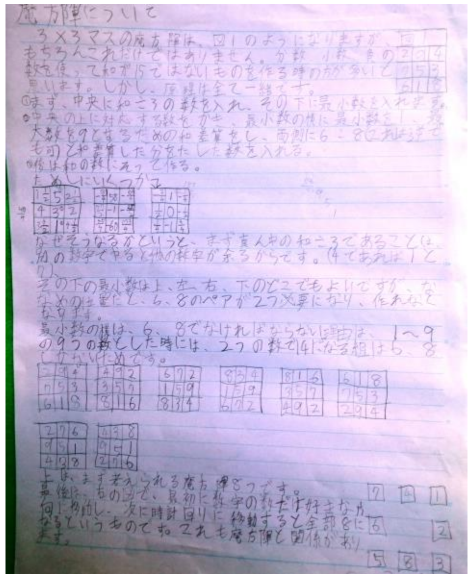
二つ目は、3 つずつ足し合わせた数列が 9 ずつ増えているという性質です。これも「等差数列では、いくつかの数を束ねて作った数列もまた等差数列である」というとても大切な性質につながる発見です。また、群数列（ぐんすうれつ）という数列の応用問題も展望（てんぼう）する内容でした。

● N君のレポート



このレポートはとてもユニークです。何と九九の表を回転させて三角形の形にして眺めてみたのです。このような発想の転換は新たな発見につながると思います。N君は、このように見ることによって、無限に続く数列という捉え方をしています。なかなか面白い視点ですね。

● K君のレポート



K君は本格的な魔方陣の研究レポートを持ってきてくれました。魔方陣とは、右の図のような、タテヨコ対角線の数字の和が皆等しくなるような方陣です。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

上の3×3の魔方陣はどのようにして作るのか、K君は次のように説明しています。

① 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 なので、それを 3 で割った 15 がタテ･ヨコ･対角線の和。
② 中央に5を入れ、その下に最小数の1を書く。
④ すると、5の上が9と決まる。
⑤ 1の両隣りの数をたすと14になるが、そのような組み合わせは6と8しかない。
⑥ 対角線を考えて、9の両隣りが決まる。
⑦ 残りの場所が決まって完成！

	5	
	1	

→

	9	
	5	
	1	

→

	9	
	5	
6	1	8

→

2	9	4
	5	
6	1	8

→

2	9	4
7	5	3
6	1	8

1の置き方と、それに対する6と8の置き方によって、魔方陣は次の 8 種類が考えられます。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

また、K君は、分数や小数、負の数を使って魔方陣を作ることもできるとして、次のような例を示してくれました。

$1\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$
4	3	2
$3\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$

$-\frac{181}{4}$	58	$-\frac{63}{4}$
$\frac{57}{2}$	-1	$-\frac{61}{2}$
$\frac{55}{4}$	-60	$\frac{173}{4}$

$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{3}{4}$

左から、和が 9、-3、0 となる魔方陣ですね。

更にオマケの話題として、次のようなパズルを紹介してくれました。

7	4	1
6		2
5	8	3

① 適当な場所を決める（例えば7）。
② その数だけ時計回りに進む（6に着く）。
③ またその数（6）だけ時計回りに移動する。
④ すると、どこから始めても必ず8に着く

不思議ですね。皆さんもやってみてください。数を並べるとこのような面白い性質が無限に見つけることができますね。レポートを書いてくれた皆さんありがとうございました。