発行年月日 2019 年5月15日（水）　第5号

発行者　盛岡中央高校附属中学校　数学科　下町壽男

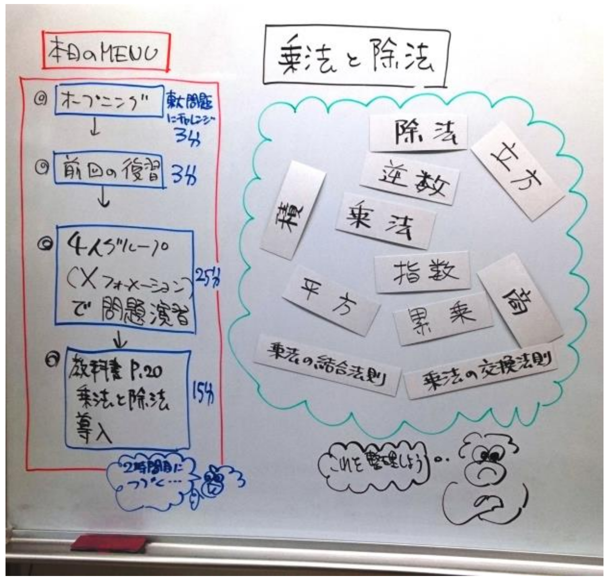
あうがく大好きさ

２０１９年度第５号

乗法と除法の授業覚書（4 月 23 日の授業より）

今回は、前号と日にちが前後してしまいましたが、4 月 23 日に行った「乗法と除法」についての授業のトピックスをまとめておきたいと思います。

● 授業の流れ



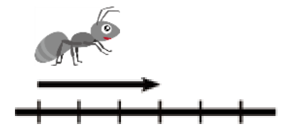
例によって、授業の最初に本日のメニューを示しました。様々な用語や法則を「つながり」をもって理解しようというのがテーマでしたね。

● マイナス×マイナスはなぜプラス

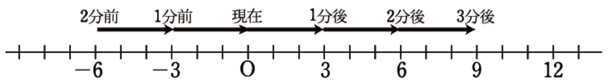
「マイナス×マイナスはなぜプラスになる？」という問いを投げかけたところ、中屋君がアリさんを例にあげて、皆の前でとても立派に説明してくれました。

彼の説明を以下にまとめておきましょう。

①1 分間に正の方向に 3 進むアリさんがいます。

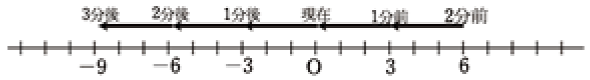


②現在位置を基準の 0 地点とすると、アリさんの動きは次の数直線のように表されます。



③ここで、**（速さ）×（時間）＝（位置）※** という式を考えると、例えば 2 分後のアリさんの位置は、（+3）×（+2 分）＝+6 となりますね。また、2 分前は-6 の地点なのですが、「2 分前」を「-2 分後」と考えて※の式にあてはめると、(+3)×(-2 分)＝-6　と考えることができますね。ここで、**「正の数×負の数＝負の数」**とおさえておきましょう。

④今度は、1 分間に負の方向に 3 だけ進むアリさんを考えます。ここで、「負の方向に 3 進む」を「正の方向に-3 進む」と考えます。



例えば現在から 2 分前のアリさんの位置は、上の数直線を見ると+6 の地点になっていますね。ここで、「2 分前」を「-2 分後」として、さっきの※式がうまくいくように考えます。

(-3)×(-2 分)＝+6　とすればいいですね。

ここで、**「負の数×負の数＝正の数」**とおさえておきましょう。

【流れでイメージする】

授業では、流れの中で納得する方法も示しました。それもあげておきましょう。

$$
\begin{aligned}
-3\times3&=-9\\
-3\times2&=-6 \quad (+3)\\
-3\times1&=-3 \quad (+3)\\
-3\times0&=\ \ 0 \quad (+3)\\
-3\times(-1)&=\\
-3\times(-2)&=
\end{aligned}
$$

かける数が1減ると、答は 3 増えている！

-3 にかける数を 3,2,1,0,-1,-2 と 1 ずつ減らしていきます。かける数を 3,2,1,0 としていくと、答は 3 ずつ増えていますね。このルールをマイナスのときまで適用させようと考えると、-3×(-1)は 3、-3×(-2)は 3+3＝6 となりますね。

正の数から正と負の数というように、数の世界が広がっても、「法則はそのままに」と考えることで、数学がどんどん発展していくのですね。

このことを「累乗」についても同じように考えてみましょう。

$2^4=16 \to 2^3=8 \to 2^2=4 \to 2^1=2$ と見ていくと、**「指数が 1 少なくなると、答が半分になる」**というルールが見えますね。ではここで指数の世界を自然数から整数に広げてみましょう。2^0は何になると考えればいいと思いますか。何となく「ゼロ！」と答えたくなるかもしれませんが、そこをぐっとこらえて「ルールをそのまま維持する」と考えてくださいね。

$$
\begin{aligned}
2^3&=8\\
2^2&=4 \quad (半分)\\
2^1&=2 \quad (半分)\\
2^0&=\\
2^{-1}&=
\end{aligned}
$$

$2^0=0$ とすると「半分ルール」が破たんする。$2^0=1$ とすればいいカンジでつながる！

同じように、2^{-1} をいくつにすれば、ルールがうまくキープされるでしょうか。

このように、数学の世界は自然でシンプルにできています。だから、そのすっきりとした美しさに惹かれる人が多いのかもしれませんね。

● 「積の絶対値」は「絶対値の積」

ここで、絶対値の大切な性質をあげておきます。それは、「積の絶対値」は「絶対値の積」という性質です。

例えば、|(-3)×2｜＝|-6|＝6　ですが、これを、|-3|×|2|＝3×2＝6　としてもよいということです。積において絶対値が分配されるイメージです。

しかし、**和の場合はだめ**ですよ。

|(-3)＋2｜＝|－1|＝1が答えですが、これを|-3|＋|2|とすると 3+2=5 となってしまいますね。

しもまっちのじいじ日記

学校の前の八重桜がとてもきれいに咲いていますね。最近、放課後になると、さんさ踊りクラブのメンバーの太鼓の音が聞こえます。春のさわやかな風の中、芝のグラウンドでいつも楽しそうに練習しているメンバーたちの様子を眺めるのが大好きです。皆さんはさんさ踊り見たことがありますか。今年は私も挑戦しようかな。

● 分数の割り算はなぜひっくり返してかけるの？

$\frac{4}{3}\div\frac{9}{5}=\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}$ のように、分数の割り算はなぜ、割る数をひっくり返してかけるのでしょう。

例えば次のような説明が考えられます。

$$\frac{4}{3}\div\frac{9}{5}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}\right)\div\left(\frac{9}{5}\times\frac{5}{9}\right)\quad ※$$
$$=\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}\right)\div 1\quad ※※$$
$$=\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}$$

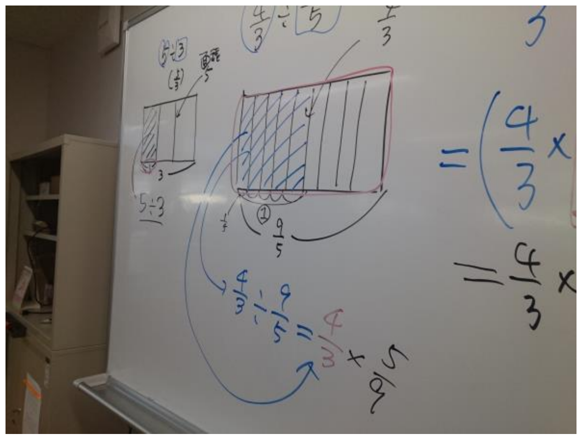
※　割られる数と割る数それぞれに同じ数 5/9 をかけました。

※※　※の式の後ろのかけ算を計算すると1になります。

あらびっくり。ひっくり返してかける式が生まれました。

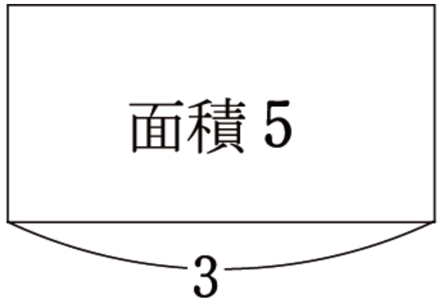
この説明で納得はできるかもしれませんが、これは**「割られる数と割る数に同じものをかけても商は同じ」**ということを約束事にして、式の操作によって説明しているだけなので、何か手品を見ているカンジです。納得はしても意味がしっくりと伝わらない気がします。

すると、中村君が、長方形のうまく分割しながら、意味も含めて説明してくれました。

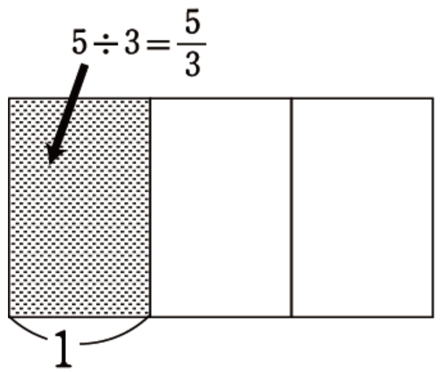


彼の説明を踏まえながら次のようにまとめておきましょう。

① 5÷3の意味

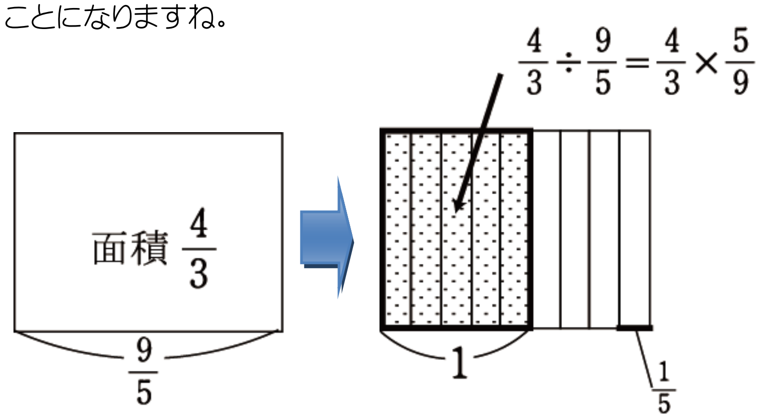


図のような、底辺（土台）が3で面積が5の長方形を考えます。このとき、底辺を1にしたときの面積が、5÷3の意味するところですね。



② $\frac{4}{3}\div\frac{9}{5}$ の意味

同じように考えると、$\frac{4}{3}\div\frac{9}{5}$ とは、底辺（土台）が 9/5 で、面積が 4/3 の長方形に対して、底辺を1にしたときの面積ということになりますね。



では、底辺（土台）を1にしたときの面積を求めてみましょう。左下の図（の右の方）を見てください。

底辺を9等分します。つまり、底辺が 1/5 の短冊のような長方形が 9 個くっついている形になりますね。この短冊長方形を5つまとめると、底辺が1になりますから、図の太い線で囲まれた長方形の面積が、$\frac{4}{3}\div\frac{9}{5}$ を表していますね。

ではこの面積を求めましょう。

長方形全体の面積が 4/3 なので、それを 9 つに分けたうちの 5 つ分ですね。つまり、面積は、$\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}$ とできますね。

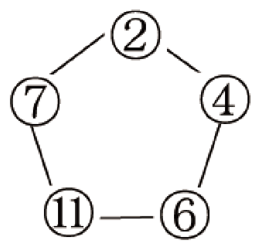
これで、分数の割り算は、割る数をひっくり返してかけることがわかりました。

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

懸賞問題　～犀川先生に挑戦～

工学博士でもある人気ミステリ作家、森博嗣氏の「笑わない数学者」という小説の中に、こんな問題があります。

> ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮の番号が書かれたビリヤードの玉から 5 個取り出して、リングに繋げてみる。この5つの玉のうち、幾つ取っても良いが、隣同士連続したものしか取れないとしよう。1つでも、2つでも、5つ全部でも良い。この条件で取った玉のナンバーを足し合わせて、1から 21 までのすべての数ができるようにしたい。どのナンバーの玉をどのように並べてネックレスを作れば良いか？



例えば左の図のようにしてみます。
1 個とると　2,4,6,7,11 が作れ、
2 個とると　6,10,17,18,9 が作れ、
3 個とると　12,21,24,20,13 が作れ、
4 個とると　23,28,26,24 が作れ、
5 個とると　30 が作れます。
でも、1や 5 や 8 などが作れないので
この選び方ではダメですね。

小説では主人公の犀川先生が、タバコを 2 本吸う間に解いてしまうのですが、その解は示されません。皆さんも頑張って犀川先生に挑戦してみて下さい。

できた人先着 3 人までステキな賞品をプレゼント！